Безу и ОТА

Пусть $\mathcal{K}$ – некоторое числовое множество ($\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Z}$). Через $\mathcal{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ будем обозначать множество всех многочленов n переменных с коэффициентами из $\mathcal{K}$. Многочлен называется *неприводимым над* $\mathcal{K}$, если его нельзя представить в виде произведения двух непостоянных многочленов из $\mathcal{K}[x]$. *Содержанием* $\operatorname{cont}(p)$ многочлена $p \in \mathbb{Z}[x]$ называется наибольший общий делитель его коэффициентов.

1. Теорема Безу. Докажите, что остаток от деления многочлена $p(x)$ на многочлен $x - a$ равен $p(a)$.

2. Теорема о рациональных корнях. Докажите, что, если несократимая дробь $p/q \in \mathbb{Q}$ является корнем многочлена $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, то числитель p делит свободный член a_0, а знаменатель q делит старший коэффициент a_n.

3. Решите уравнение $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$.

4. Докажите, что многочлен из $\mathbb{R}[x]$ степени n имеет не больше n корней с учётом кратности.

5. Докажите, что, если значения двух многочленов из $\mathbb{R}[x]$ степени не выше n совпадают по крайней мере в $n+1$ точке, то эти два многочлена равны.

6. Критерий Эйзенштейна. Пусть $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ и для некоторого простого числа p все коэффициенты, кроме a_n, делятся на p, а свободный член не делится на p^2. Докажите, что f неприводим над $\mathbb{Z}$.

7. Докажите, что многочлен $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$ для каждого простого числа p.

8. Лемма Гаусса. Докажите, что $\operatorname{cont}(pq) = \operatorname{cont}(p) \cdot \operatorname{cont}(q)$.

9. Докажите, что многочлен $p \in \mathbb{Z}[x]$ приводи́м в $\mathbb{Q}[x]$ тогда и только тогда, когда он приводи́м в $\mathbb{Z}[x]$.

10. Разложите на множители многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 12$.

11. При каких a и b многочлен $p(x) = (a + b)x^5 + abx^2 + 1$ делится на $x^2 - 3x + 2$?

12. Пусть $p(x) = (2x^2 - 2x + 1)^{20}(3x^2 - 3x + 1)^{19}$. Найдите сумму коэффициентов этого многочлена **a)** при всех, **b)** при чётных и **c)** при нечётных степенях переменной.

13. Решите уравнение $n^5 + n^4 = 7^m - 1$ в целых числах n, m.

14. При каких n многочлен $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}$ делится на $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$?

15. Найдите все многочлены $p(x)$, удовлетворяющие тождеству $x \cdot p(x-1) = (x-26)p(x)$.

16. Пусть n – натуральное число, а $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $\ldots$, $P(n) = n$. Докажите, что число $P(0)$ делится на $2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

17. Найдите все натуральные числа a, для которых найдётся многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющий равенствам $p(\sqrt{2}+1) = 2 - \sqrt{2}$ и $p(\sqrt{2}+2) = a$.

18. Многочлен $p \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ зануляется во всех точках гиперплоскости $\ell(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0$. Докажите, что $p \,\vdots\, \ell$.

19. Разложите на множители многочлен $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

20. Разложите на множители $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.

21. Разложите на множители многочлен $x^3 + 3xy + y^3 - 1$.

22. Пусть $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ — десятичная запись числа 65^k при некотором $k \geqslant 2$. Докажите, что многочлен $a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ не имеет рациональных корней.

23. Рассмотрим всевозможные тройки (x, y, z) вещественных чисел, удовлетворяющих равенству $x + y + z = -1$. Найдите наибольшее число C при котором для любой такой тройки верно неравенство $C \cdot |x^3+y^3+z^3+1| \leqslant |x^5+y^5+z^5+1|$.